Leçon 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Cadre :

1. Variables aléatoires discrètes, exemples. —

1. Loi discrète, espace probabilisé discret. —

- Def : Un espace probabilisable discret est un espace (E, B) où E est dénombrable et où $B = \mathscr{E}$
- Rem : Une v.a. X sur un espace probabilisable discret est caractérisée par la probabilité des évènements élémentaires $\{x\}$.
- Def : Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, et soit E un ensemble. Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X^{-1}\{x\} \in A$ $\forall x \in E$.
  On définit alors la loi de probabilité de X par : $x \in E \mapsto P(X = x) \in [0, 1]$.
- Pro : Pour toute partie E' dénombrable de E et pour tout $g : E' \to [0, 1]$ telle que $\sum_{x \in E'} g(x) = 1$, il existe une unique probabilité P sur $(E', \mathscr{P}(E'))$ telle que $P(\{x\}) = g(x)$ $\forall x \in E$. La fonction g est alors appelée germe de la probabilité P.
- Rem : Pour X_1, X_2 des v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$, $X_1 + \lambda X_2$ et $X_1.X_2$ sont encore des v.a. discrètes.

2. Quelques lois discrètes usuelles. —

- Def : (Loi uniforme) Supposons $X(\Omega) = \{1, .., \}$ pour un $n \geq 1$. On dit que X est de loi uniforme si $P(X = k) = \frac{1}{n}$, et on la note $U_{\{1,..,n\}}$.
- Ex : Pour un lancer de dé non pipé, la v.a. X égale au chiffre obtenu suit une loi uniforme sur $\{1, .., 6\}$.
- Def : (Loi de Bernouilli) Une v.a. X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $B(p)$ si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = (1 - p)$.
- Ex : Le jet d'une pièce équilibrée se modélise avec une loi de Bernouilli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
- Def : (Loi binômiale) Une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi binômiale de paramètres $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$, notée $Bin(n, p)$, si : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $\forall 0 \leq k \leq n$.
- Ex : Pour une urne contenant m boules (l noires, n-l blanches), et si l'on tire au hasard avec remise n boules, le nombre de boules noires tirées suit une loi $Bin(n, \frac{l}{m})$.
- Def : (Loi géométrique) Une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $Géom(p)$, si : $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ $\forall k \geq 1$.
- Ex : Pour une épreuve aléatoire à deux issues de probabilité de succès p, le nombre d'échecs avant le premier succès suit une loi binômiale de paramètre p.
- Def : (Loi de Poisson) Une v.a X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée P_λ, si : $P(X = k) = e^{-k} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\forall k \geq 0$.
- Ex : C'est la loi de v.a. décrivant l'apparition d'évènements rares, nombres d'accidents, d'erreurs de fabrication, d'individus atteints d'une maladie.
- Def : (Loi hypergéométrique) Une v.a X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $N, M, n \in \mathbb{N}^*$ avec $M < N$ et $n \leq N$, notée $H(n, M, N)$ si : $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $\forall 0 \leq k \leq min(M, n)$.
- Une urne contient N boules dont M blanches, et on tire n boules sans remise. La v.a. X égale au nombre de boules blanches obtenues suite une loi $H(n, M, N)$.

3. Espérance, variance. —

- Def : Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la somme $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| P(X = x)$ est finie, on dit que X est d'espérance finie et on définit l'espérance de X par : $E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x)$.
- Ex : $E[U_{\{x_1,..,x_n\}}] = \frac{x_1 + .. + x_n}{n}$, $E[Bin(n, p)] = np$, $E[Géom(p)] = \frac{1}{p}$, $E[P_\lambda] = \lambda$, $E[H(n, M, N)] = \frac{nM}{N}$.
- Rem : Si l'ensemble des x tels que $P(X = x) > 0$ est borné dans $\mathbb{R}$, alors l'espérance de X est finie.
  Cela est en particulier vrai si un tel ensemble est fini.
- Contre-ex : $X \sim \frac{6}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{k^2}$ est d'espérance infinie.
- Théorème de Transfert : Soit X une v.a. discrète à valeurs dans un ensemble E, et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. discrète.
  Y admet une espérance ssi $E[f(X)] := \sum_{x \in E} |f(x)| P(X = x)$ est finie, et dans ce cas on a $E[Y] = \sum_{x \in E} f(x) P(X = x)$.
- Pro : Inégalité de Markov : Soit X v.a. réelle discrète d'espérance finie. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$.
- Def : Pour $p \geq 1$, une v.a. discrète réelle X admet un moment d'ordre p ssi X^p est d'espérance finie. On définit alors $E[X^p]$ le moment d'ordre p de X.
- Pro+Def : Soit X v.a. réelle discrète possédant un moment d'ordre 2. Alors X est d'espérance finie et la v.a. $X - E[X]$ possède un moment d'ordre 2.
  On définit alors $var(X) := E[(X - E[X])^2$, et on a $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.
- Rem : Avec le théorème de transfert, on a ainsi : $var(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 P(X = x) - E[X]^2$.
- Ex : $var(U_{\{x_1,..,x_n\}}) = \frac{x_1^2 + .. + x_n^2}{n} - (\frac{x_1 + .. + x_n}{n})^2$, $var(Bin(n, p)) = np(1-p)$, $var(Géom(p)) = \frac{1-p}{p^2}$, $var(P_\lambda) = \lambda$.
- Pro : Inégalité de Tchebychev : Soit X v.a. réelle discrète de variance finie. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X - E[X]| \leq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$.

2. Indépendance et somme de variables aléatoires discrètes. —

1. Indépendance. —

- Def : Deux v.a. discrètes X_1, X_2 à valeurs dans des ensembles E_1, E_2 sont dites indépendantes si $\forall A \in \mathscr{P}(E_1)$, $\forall A' \in \mathscr{P}(E_2)$, on a $P(\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in A'\}) = P(X_1 \in A).P(X_2 \in A')$.
- Rem : Cette notion se généralise à une famille quelconque de variables aléatoires.

- Pro : Des v.a. $X_1, .., X_n$ à valeurs dans des espaces $E_1, .., E_n$ sont indépendantes ssi $\forall x_i \in X_i(\Omega)$, $P(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \cap .. \cap \{X_n = x_n\}) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2)..P(X_n = x_n)$. Pro : Si $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ et si X_1, X_2 sont d'espérance finie, alors la v.a. X_1X_2 est discrète, d'espérance finie, et avec $E[X_1X_2] = E[X_1]E(X_2]$.

2. *Somme de v.a. discrètes indépendantes, fonction caractéristique.* —

- Pro+Def : Pour X_1, X_2 v.a. réelles discrètes, on définit le produit de convolution des lois de probas de X_1 et X_2 comme la loi de probas discrète telle que :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ P_{X_1} * P_{X_2}(\{x\}) = \sum_{y \in \mathbb{R}} P(X_1 = x)P(X_2 = y - x)$.
- Pro : Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $P_{X_1} * P_{X_2}$ est la loi de probas de $X_1 + X_2$.
- Ex : Soient X_1 et X_2 deux v.a. réelles discrètes indépendantes.
  Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.
  Si $X_1 \sim Bin(n_1, p)$ et $X_2 \sim Bin(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$.
- Rem : Si $(X_1, .., X_n)$ sont des v.a. de Bernouilli de paramètre p indépendantes, alors $X_1 + .. + X_n$ est de loi $Bin(n, p)$.
- Def : Pour $x \in [0, 1[$, on définit $D_n(x)$ le n-ième coefficient du développement dyadique de x : $x = \sum_{n \geq 1} \frac{D_n(x)}{2^n}$.
- Thm : Sur l'espace probabilisé $([0, 1[, B_{[0,1[}, \mu_{[0,1[})$ où $\mu_{[0,1[}$ est le restriction de la mesure de Lebesgue à $[0, 1[$, les fonctions D_n définissent des variables aléatoires discrètes indépendantes, de loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.
  Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{D_n}{2^n}$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.
- **Dev** : Théorème de Weierstrass : Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue on définit $B_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ le n-ième polynôme de Bernstein.
  Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$, et in existe $C > 0$ telle que $\|f - B_n\|_\infty \leq C.w(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où $w(h) = sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq h\}$ est le module d'uniforme continuité de f.
- Def : Soit X une v.a. réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : t \mapsto E[e^{iXt}]$.
- Pro : Si X et Y sont deux v.a. réelles discrètes indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

3. Séries génératrices (variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$). —

- Def+Pro : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $s \in]-1, 1[$, la variable aléatoire s^X est bien définie et d'espérance finie.
  On note, quand cette quantité existe, $G_X(s) := E[s^X]$ la fonction génératrice de X, qui est au moins définie sur $]-1, 1[$.
- Pro : On a :
  i) Le domaine de définition de G_X contient $[-1, 1]$, avec $|G_X| \leq 1$ sur ce domaine, et $G_X(1) = 1$.
  ii) $\forall s \in [-1, 1]$, on a : $G_X(s) = \sum_{n \geq 0} P(X = n)s^n$.
  iii) G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
  iv) La fonction génératrice caractérise la loi de X, avec : $\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = P(X = n)$.
- Exemple de fonction caractéristique de lois usuelles.
- **Dev** : Processus de Galton-Watson : Soient $X_{n,k}$ des v.a iid de loi discrète sur $\mathbb{N}$, intégrables. On définit la suite de v.a. (Z_n) par $Z_0 := 1$ et $Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$. Alors la probabilité d'extinction $a := P(\{existsn \text{ tq } Z_n = 0\})$ vaut 1 si $E[X_{0,0}] < 1$ ou si $P(X_{0,0} = 1) = 1$ et est dans $[0, 1[$ si $E[X_{0,0}] \geq 1$ et $P(X_{0,0} = 1) < 1$.
- Appli à Galton-Watson ?

4. Théorèmes limites et approximations. —

1. *Approximation de loi de poisson.* —

- Def : Soient $(X_n)_n$, X des v.a. réelles définies sur le même espace probabilisé. On dit que X_n converge en loi vers X si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, on a : $E[f(X_n)] \to_{n \to +\infty} E[f(X)]$.
- Pro : Si $(X_n)_n$,X sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X ssi $\forall m \geq 0$, $P(X_n = m) \to P(X = m)$.
  Cette propriété reste vraie si les X_n et X sont à valeurs dans un ensemble H pour lequel tout point x n'est pas dans l'adhérence de $H - \{x\}$.
- Thm : Soit $(S_n)_n$ une suite de v.a. de loi $Bin(n, p_n)$. Si $n.p_n$ converge vers un $\lambda > 0$, alors S_n converge en loi vers une v.a. de Poisson de paramètre λ, càd : $P(S_n = m) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$.
- Rem : Dans le cas où p est assez petit, on peut approximer une v.a. de loi $Bin(n, p)$ par P_{np}.
- Ex : La loi de la variable aléatoire S_n associée au nombre de personnes nées le premier Janvier dans un ensemble de n personnes prises au hasard est $Bin(n, \frac{1}{365})$. Pour n au moins de l'ordre de 400, on peut approcher la valeur de $P(S_n = k)$ par $e^{-\frac{n}{365}} \frac{(\frac{n}{365})^k}{k!}$.
- Théorème des évènements rares de Poisson : Pour tout $n \geq 0$, soit $M_n \geq 2$ et soient $A_{n,1}, .., A_{n,M_n}$ des évènements de Ω. On définit $S_n := \sum_{j \leq M_n} \chi_{A_{n,j}}$.
  Si $\sum_{j \leq M_n} P(A_{n,j}$ converge vers un $\lambda > 0$ et si $max_j(P(A_{n,j})$ converge vers 0, alors S_n converge en loi vers une v.a. de loi Poisson de paramètre λ.
- Ex : Illustration avec les clients d'une banque.

2. *Loi des grands nombre et théorème central de la limite.* —

- Loi faible des grands nombres : Soient (X_n) des v.a. réelles indépendantes et de même loi, d'espérance finie. Alors la suite de v.a. $\frac{X_1 + .. + X_n}{n}$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.
- App : Pour X_1 de loi de Bernouilli de paramètre p, $\frac{X_1 + .. + X_n}{n}$ qui est de loi $Bin(n, \frac{p}{n})$ converge en probabilités vers la v.a. constante p.
- Loi forte des grands nombres : Soient (X_n) des v.a. réelles indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2. Alors la suite de v.a. $\frac{X_1 + .. + X_n}{n}$ converge P-presque partout vers $E[X_1]$.
- App : La moyenne empirique $\overline{X_n} := \frac{X_1 + .. + X_n}{n}$ permet ainsi d'estimer $E[X_1]$ de façon consistante.

- Théorème central de la limite : Soient $(X_n)_n$ des v.a. réelles indépendantes et de même loi, possédant un moment d'ordre 2. Alors pour $S_n := X_1 + .. + X_n$, $\frac{S_n - nE[X_1]}{\sqrt{var(X_1)n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.
- App : Pour S_n de loi $Bin(n,p)$, pour tout $a < b \in \mathbb{R}$, on a : $[P(a < S_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}} exp(-\frac{x^2}{2})dx] \to_{n \to +\infty} 0$.

  On peut alors approximer $P(S_n = k)$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} exp(\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)})$.

Références

Ouvrard (Probas 1) : Espace probabilisé discret, P déterminée par les $P(\{w\})$, v.a. discrète, loi de proba associée, germe, propriété. Loi uniforme, de Bernouilli, binomiale, de Poisson, géométrique, hypergéométrique. Espérance d'une v.a. discrète, espérance d'une constante, X bornée est intégrable, contre-ex non intégrable, espérance des lois usuelles, Th de transfert, moments d'ordre k, variance, variances usuelles. Indépendance d'évènements, indépendance de v.a., caractérisation équivalente pour les v.a. discrètes, espérance du produit. Loi de la somme de deux v.a. indépendantes discrètes, somme de lois de Poisson, somme de lois de Bernouilli. Série génératrice, domaine de définition, propriétés, lien avec les moments, Processus de Galton-Watson.(Dev)(incomplet). Théorème de Poisson, nombre de personnes nées un 1er Janvier.

Ouvrard (Probas 2) : Construction d'une loi uniforme sur [0,1[avec une série de Bernouilli indépendantes via le développement dyadique. Th des évènements rares de poissons, illustration avec les clients d'une banque. Loi faible des grands nombres, application à des Bernouilli, Loi forte des grands nombres, application à la détermination de $E[X_1]$ via $\frac{X_1 + .. + X_n}{n}$, Théorème central de la limite, intervalle de confiance d'une Bernouilli, approximation de $P(S_n = k)$ pour une Bernouilli.

Zuily, Queffélec : Th de Weierstrass.(Dev) (incomplet)

Barbe, Ledoux : Convergence en loi, cv en loi pour des v.a. discrètes.

June 3, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes